מד"ר הניתנות להפרדת משתנים

(1) $y' = f(x)\cdot g(y)$

(2) $M(x)\cdot N(y)\,dx + P(x)\cdot Q(y)\cdot dy = 0$

⊛ מד"ר הניתנות להמרה למשוואה פרידה ⇐ $y'=f(ax+by(x)+c) \longrightarrow z=ax+by+c$, $z'=a+b\cdot y'$ ...

הצבה טריגונומטרית אוניברסלית

- $t=\tan(\frac{x}{2})$
- $x=2\arctg(t)$ • $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ • $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ • $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

מד"ר הומוגנית

- $f(t\cdot x, t\cdot y)=t^{\alpha}\cdot f(x,y) \Rightarrow t\neq0$, משוואה הומוגנית מסדר α
- $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})$

⊛ אם f הומוגנית מספר 0 אז מתקיים:

(1) $y'=\varphi(\frac{y}{x})$ צורה נורמלית (2) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \rightarrow$ M,N בעלי הומוגניות מ' סדר זהה

⊛ במצב זה נציב $\frac{y}{x}$

⊛ ע"פ מצב הדדי בין הישרים ← ① נמצא שוק משותף ← z (אין הלוק) ② ישרים נחתכים: $\begin{cases}w=y-y_0\\ v=x-x_0\end{cases}$ ↳ $\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dv}$

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

משוואה ליניארית

$a_n(x)\cdot y^{(n)}+a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)\cdot y=b(x)$ — אם $b(x)\neq0$ - אי הומוגנית מסדר n

* פתרון או ע"י גורם אינטגרציה $M\neq0$ או ע"י וריאציית מקדמים:

$y_{\text{כללי אי הומו'}} = y_{\text{פרטי אי-הומו'}} + y_{\text{כללי הומו'}}$

*לפעמים - מד"ר ליניארית ביחס ל $x(y)$

* אם y_1,y_2 - פתרונות של אי הומו' אז y_1-y_2 ← פתרון של הומו'
* אם y_1 - פתרון הומו', y_2 - פתרון אי הומו' אזי (y_1+y_2) פתרון - אי הומו'
* אם $y_1\neq0$ פתרון הומו', y_2 פתרון אי הומו' ← $y=C\cdot y_1+y_2$ ← פתרון כללי של אי הומו'
*אם y פתרון הומו' ← $C\cdot y$ - פתרון כללי של הומו'
* בהצגה נורמלית אין מקדם (=1) ליד חזקה הגבוהה ביותר.
* משוואת ברנולי $(z=y^{1-\alpha})$ יכולה להיות גם $x(y)$

$y'+a(x)\cdot y=b(x)\cdot y^{\alpha}$, $\alpha\neq0,1$

משוואה מדויקת

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

* מד"ר מדויקת אם ורק אם $M'_y=N'_x$. אם כן $M=u'_x$, $N=u'_y$ כך שהביטוי יהיה דיפרנציאל שלם של u. בהנחה ש M,N - גזירות ברציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות.
* פתרון המשוואה יכתב כ $u=C$
* אם המשוואה לא מדויקת ניתן למצוא מכפלה בגורם אינטגרציה:

(1) μ תלוי רק בx , $g_1(x)=\frac{M'_y-N'_x}{N}$, $\mu=e^{\int g_1(x)dx}$

(2) μ תלוי רק בy , $g_2(y)=\frac{N'_x-M'_y}{M}$, $\mu=e^{\int g_2(y)dy}$

[illegible] - מד"ר סדר 1

* פתרון של המשוואה הנתונה שלא משתנה עם הזמן ← פתרון שיווי משקל. להם קו אופקי בשדה כיוונים
* נ.ב. y ← נמצאו y'
* קיום ויחידות אם נתונה בעיית התחלה $\begin{cases}y'=f\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ - נניח כי f, f'_y רציפות בסביבה פתוחה D

*קיום של פתרון בעיית התחלה - קטע מקסימלי של x המכיל נק' התחלה בו מוגדר ומקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה.

*שיטת אוילר:

- עבור בע"ת קושי שמקיימת משפט קיום ויחידות.
- לוקחים קטע $[a,b]$ ומחלקים אותו קבוצה $h=\frac{b-a}{n}$ (n - מס' חלוקים)
- בכל קטע $[a,a+h]$ ← $y-y_0=y'(x_0,y_0)(x-x_0)$ ← משוואת המשיק ב (x_0,y_0) נק' התחלה
- מוצאים חיתוך משוואת משיק עם $x=x_0+h$ ← זוהי הנק' הבאה

מודלים

① גידול אוכלוסיה $y(t)$ ← $[\overset{-r}{\text{מקדם}}]$ $y'=r\cdot y$ ← אם $-r$ פירוק רדיואקטיבי!

② גידול לוגיסטי (גידול אוכלוסייה קטן/שווה ל K) ← $y'=r\cdot y(1-\frac{y}{K})$

③ תגובה כימית $(A+B\rightarrow AB)$ ← $x'=K(a-x)(b-x)$

④ מיכל אליו נכנס ויוצא חומר - כמות חומר - y: $\vartheta_{input}-\vartheta_{output}=y'=$ קצב שינוי כמות

מד"ר מסדר 2 - הורדת סדר

- הצבה זו היא הצבה כללית!

① $F(x,y',y'')=0 \longrightarrow z(x)=y'(x)$

② $F(y,y',y'')=0 \longrightarrow z(y)=y'(x)$

③ $F(\frac{y''}{y},\frac{y'}{y},x)=0 \longrightarrow z(x)=\frac{y'}{y}$

מד"ר מסדר n

* צירוף ליניארי של n פתרונות בת"ל של מד"ר הומוגנית מסדר n ← פתרון כללי שלה: $y=C_1\cdot y_1+\ldots+C_n y_n$
* קב' הפתרונות נקראת מע' בסיסית של פתרונות
* אם $W\neq0$ (בנקודה) בכל נק' מת.ה אז הפתרונות בת"ל!

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\\ y'_1 & y'_2 & \cdots\\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

* נוסחת אבל למד"ר הומוגנית כשידוע 2 פתרונות: תקף רק בנורמלית

$W(y_1,y_2)=C\cdot e^{-\int a_1(x)dx}$

*אם ידוע פתרון אחד, נמצא 2 ← $y_2=y_1\cdot\int\frac{W}{y_1^2}dx$

מד"ר ליניאריות הומוגניות/אי הומוגניות עם מקדמים קבועים

* מחפשים פתרון מהצורה $e^{\lambda x}$ ובונים פולינום אופייני $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
* אם $\lambda_1\neq\lambda_2$ ← $y_h=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ *אם $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ← $y_h=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$
*אם $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ ← $y_h=C_1e^{\alpha x}\sin(bx)+C_2e^{\alpha x}\cos(bx)$
* מחפשים פתרון פרטי ע"י וריאציית מקדמים $C'_1(x)=\frac{\begin{vmatrix}0&y_2\\ f(x)&y'_2\end{vmatrix}}{W}$ $C'_2(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_1&0\\ y'_1&f(x)\end{vmatrix}}{W}$
* או ע"י השוואת מקדמים ← אם הפונק' מהצורה $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cdot\cos(bx)+Q_m(x)\cdot\sin(bx))$

① נבנה פרמטר $s=a+i\cdot b$, נמצא ריבוי k שלו משורשי פולינום אופייני

② נחפש פתרון פרטי ← $y_p=x^ke^{ax}[R_l(x)\cdot\cos bx+H_l(x)\sin bx]$ כאשר $l=\max(n,m)$

*עבור וריאציית מקדמים - מחפשים פתרון ל- $\begin{cases}C'_1\cdot y_1+C'_2\cdot y_2=0\\ C'_1\cdot y'_1+C'_2\cdot y'_2=f(x)\end{cases}$

מערכת משוואות הומוגניות

$\underset{\text{וקטור נגזרות}}{\bar{Y}'(t)}=\underset{\text{מטריצת מקדמים}}{A}\cdot\underset{\text{וקטור פונקציות}}{\bar{Y}(t)}+\bar{F}(t)$ $\bar{Y}_n(t)=\begin{pmatrix}y_{n_1}(t)\\ \vdots\\ y_{n_n}(t)\end{pmatrix}$ → וקטור פונקציות עם n רכיבים

* אם יש n וקטורי פונק' - נקראים מע' בסיסית של פתרונות אם הם פתרונות של המשוואה וגם בת"ל. אם כן - הפתרון הכללי הוא קומבינציה ליניארית שלהם.
* אם $W\neq0$ - הפתרונות בת"ל $W(\bar{Y}_1(t)\ldots\bar{Y}_n(t))=\begin{vmatrix}y_{1_1}&\cdots&y_{n_1}\\ \vdots & & \vdots\\ y_{1_n}&\cdots&y_{n_n}\end{vmatrix}$
* למע' הומוגנית נחפש פתרון ע"י $(A-\lambda I)\cdot\bar{x}=\bar{0}$, $\det|A-\lambda I|=0$ זוהי המשוואה האופיינית ופתרונותיה נקראים ערכים עצמיים של מטריצה A,
* אם כל הערכים העצמיים שונים ← $\bar{Y}=C_1\bar{Y}_1+\ldots+C_n\cdot\bar{Y}_n$
* אם קיבלנו הערכים העצמיים שורש מרוכב ←

$\bar{y}_1(t)=[\bar{x}_1\cdot\cos(\beta t)-\bar{x}_2\sin(\beta t)]\cdot e^{\alpha t}$

$\bar{y}_2(t)=[\bar{x}_2\cdot\cos(\beta t)+\bar{x}_1\cdot\sin(\beta t)]\cdot e^{\alpha t}$

*אם לא הומוגני: $C_i(t)=\int C'_i(t)dt$